

RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Rendiconto del 20 febbraio 1921.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sulle funzioni abeliane.* II: *La geometria sulle varietà abeliane.* Nota del Socio G. CASTELNUOVO ⁽¹⁾.

5. Conviene illuminare i risultati della Nota precedente ⁽²⁾ col linguaggio della geometria algebrica. Formiamo perciò, mediante rapporti convenienti di funzioni intermedie relative alla matrice (1), $p+1$ funzioni abeliane

$$(21) \quad x_i = f_i(u_1, \dots, u_p) = f_i((u)) \quad (i = 1, 2, \dots, p+1)$$

cioè funzioni meromorfe al finito, aventi i $2p$ gruppi di periodi forniti dalla detta matrice. E ricordiamo che tra le x_i passa sempre una relazione algebrica

$$(22) \quad V(x_1, \dots, x_{p+1}) = 0,$$

la quale rappresenta una varietà abeliana V_p , di uno spazio a $p+1$ dimensioni. Supporremo che la corrispondenza tra il punto (21) della V_p ed il gruppo (u_1, \dots, u_p) di valori dei parametri sia biunivoca.

In questa ipotesi, data la matrice (1), la varietà abeliana V_p è determinata, a meno di una trasformazione birazionale Viceversa, data la V_p , è determinata la matrice (1) od una matrice *equivalente* (Scorza), cioè dedotta dalla (1) mediante combinazioni lineari tra le orizzontali (che por-

⁽¹⁾ Presentata nella seduta del 6 febbraio 1921.

⁽²⁾ Questi Rendiconti, vol. XXX, 1^o sem., fasc. 2^o, pag. 50; essa verrà citata con I seguito dal n. del § o della formola.

tano a sostituire ai parametri u nuovi parametri e mediante sostituzioni lineari a coefficienti interi, unimodulari, tra le verticali (che portano a sostituire un sistema di periodi primitivi con un nuovo sistema di periodi primitivi).

Ne viene che le trasformazioni eseguite in I, 3 non alterano la varietà V_p , ma permettono di introdurre in questa un sistema più comodo di parametri U ed un più semplice sistema di periodi (13). Al contrario, la trasformazione di parametri (I (16)), $U_i = \delta v_i$, quando $\delta > 1$, e l'adozione della matrice di periodi (17) porta a rappresentare i punti U_i della varietà V_p sui gruppi di una involuzione d'ordine δ^{p-1} appartenente ad una nuova varietà abeliana W_p descritta dal punto v_i ; il gruppo generico della involuzione essendo dato da $\left(v_1 + \frac{a_1 e_1}{\delta}, \dots, v_p + \frac{a_p e_p}{\delta} \right)$, ove a_i percorre i numeri $0, 1, \dots, \frac{\delta}{e_i} - 1$.

Premesso ciò, riprendiamo la funzione intermediaria $\varphi((u))$ o $\varphi_2((U))$ (I, nn. 1-3). L'equazione $\varphi = 0$ o $\varphi_2 = 0$ rappresenta una varietà algebrica Φ a $p-1$ dimensioni entro V_p , varietà intermediaria. La corrispondenza algebrica $(1, \delta^{p-1})$ ora considerata tra V_p e W_p muta la Φ in una nuova varietà intermediaria Θ di W_p , appartenente all'involuzione suddetta; la quale varietà è rappresentata dall'annullarsi della funzione Θ d'ordine δ data dalle formole (18) e (19), e può quindi chiamarsi varietà Θ d'ordine δ . Con ciò il risultato si presenta così:

Data entro una varietà abeliana V_p una varietà intermediaria Φ (a $p-1$ dimensioni) di determinante $\delta > 0$, è sempre possibile trasformare la V_p in una nuova varietà abeliana W_p con una trasformazione razionale $(1, \delta^{p-1})$, in guisa che la Φ si muti in una varietà Θ d'ordine δ della W_p . E viceversa, ad ogni varietà Θ d'ordine δ di W_p appartenente alla involuzione ivi esistente corrisponde una varietà intermediaria di V_p .

Ora una funzione Θ d'ordine δ contiene linearmente δ^p costanti arbitrarie; ma se la Θ è costretta a verificare le condizioni I (19), il numero di queste costanti si riduce a $e_1 e_2 \dots e_p = \delta$ ⁽¹⁾. Sicchè la varietà Θ di W_p dell'ultimo teorema, e quindi anche la Φ di V_p , appartiene ad un sistema lineare $\infty^{\delta-1}$. Se però insieme alla Φ si considerano le sue trasformate, entro V_p , mediante le ∞^p trasformazioni ordinarie di 2^a specie $u_i = u_i + \text{cost.}$, si conclude:

Una varietà intermediaria di determinante δ , entro la varietà abeliana V_p , appartiene ad un sistema algebrico continuo $\infty^{p+\delta-1}$ costituito da ∞^p sistemi lineari di dimensione $\delta - 1$.

p varietà generiche del sistema continuo hanno $p! \delta$ punti comuni. Infatti p varietà Θ di ordine δ di W_p hanno in comune (Poincaré, Wirtinger)

⁽¹⁾ Cfr. Krazer, *Lehrbuch der Thetafunktionen* (Teubner, 1903), pag. 126.

$p!$ punti, i quali si distribuiscono, nel nostro caso, in $p!$ gruppi della involuzione esistente su V_p . A questi gruppi corrispondono altrettanti punti di V_p comuni a p varietà Φ ⁽¹⁾.

6. Supponiamo ora di conoscere due funzioni intermediarie $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$ relative alla stessa matrice (1); siano δ_1 , δ_2 i due loro determinanti, non nulli, e $m_{ik}^{(1)}$, $m_{ik}^{(2)}$ i loro interi caratteristici. Nel caso, di maggiore interesse, che le $m_{ik}^{(1)}$ non siano proporzionali alle $m_{ik}^{(2)}$, la matrice (1) possiede due diverse forme bilineari alternate (I, n. 2), ed è quindi singolare (Scorza).

Presi come esponenti due numeri interi positivi r_1, r_2 , formiamo la funzione

$$(23) \quad \varphi = \varphi_1^{r_1} \varphi_2^{r_2}$$

che è pure intermediaria, coi periodi (1), e i numeri caratteristici $r_1 m_{ik}^{(1)} + r_2 m_{ik}^{(2)}$. Il determinante δ di φ è il pfaffiano, in valore assoluto, della matrice quadrata $\| r_1 m_{ik}^{(1)} + r_2 m_{ik}^{(2)} \|$; è quindi una forma d'ordine p in r_1, r_2 :

$$(24) \quad \delta = I_0 r_1^p + \binom{p}{1} I_1 r_1^{p-1} r_2 + \binom{p}{2} I_2 r_1^{p-2} r_2^2 + \cdots + I_p r_2^p,$$

dove $I_0 = \delta_1$, $I_p = \delta_2$.

Se Φ_1, Φ_2 sono le varietà intermediarie a $p - 1$ dimensioni, in V_p , rappresentate da $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, la varietà Φ rappresentata da $\varphi = 0$ appartiene a un sistema continuo che, con le notazioni della geometria algebrica, si suole indicare col simbolo $\{r_1 \Phi_1 + r_2 \Phi_2\}$.

Il numero delle intersezioni di p varietà generiche del sistema è $p! \delta$ (n. 5). D'altra parte il numero stesso è dato simbolicamente da

$$(25) \quad [r_1 \Phi_1 + r_2 \Phi_2]^p = r_1^p [\Phi_1^p] + \binom{p}{1} r_1^{p-1} r_2 [\Phi_1^{p-1} \Phi_2] + \cdots + r_2^p [\Phi_2^p],$$

dove $[\Phi_1^{p-h} \Phi_2^h]$ indica il numero delle intersezioni di $p - h$ varietà appartenenti al sistema $\{\Phi_1\}$ ed h varietà appartenenti al sistema $\{\Phi_2\}$. Poichè la espressione (25) ha lo stesso valore della (24) moltiplicata per $p!$ in corrispondenza ad ogni coppia di numeri interi positivi r_1, r_2 , segue che

$$(26) \quad [\Phi_1^{p-h} \Phi_2^h] = p! I_h.$$

Quindi i coefficienti della forma binaria (24), che sono invarianti simultanei delle due funzioni intermediarie φ_1, φ_2 , hanno il significato geometrico assegnato dalle (26).

7. Il risultato si può facilmente estendere al caso di tre o più funzioni intermediarie. La massima generalità si ottiene colla seguente considerazione.

⁽¹⁾ Il Lefschetz nella Memoria inedita già citata arriva a questo e al successivo risultato mediante considerazioni di *Analysis situs*.

Si supponga che l'indice di singolarità (Scorza) della matrice (1) sia x , ed in conseguenza che la (1) possegga $x+1$ forme alternate (principali) di Riemann linearmente indipendenti. Siano

$$(27) \quad \sum m_{ik}^{(l)} \xi_i \eta_k \quad (l = 0, 1, \dots, x)$$

le forme reciproche di quelle, scelte in modo da costituire una *base minima*, in modo adunque che ogni altra forma consimile relativa alla matrice (1) possa ottenersi come combinazione lineare a coefficienti interi, r_l , delle (27) ⁽¹⁾. Allora, detta φ_l una funzione intermediaria cogli interi caratteristici $m_{ik}^{(l)}$, e detta Φ_l la varietà rappresentata entro V_p da $\varphi_l((u)) = 0$, risulta che $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_x$ costituiscono una *base minima* per le varietà intermediarie entro V_p . Al variar degli interi r_l il sistema continuo

$$(28) \quad \{ r_0 \Phi_0 + r_1 \Phi_1 + \dots + r_x \Phi_x \}$$

fornisce tutte le varietà intermediarie di V_p . Anzi fornisce tutte le varietà algebriche a $p-1$ dimensioni di V_p , in virtù di un importante teorema con cui il Lefschetz, nella Memoria inedita nominata, estende a V_p un risultato che Appell ed Humbert avevano stabilito per le superficie iperellittiche.

Per ottenere la più generale espressione del teorema di Bézout entro V_p si formi il determinante

$$\| r_0 m_{ik}^{(0)} + \dots + r_x m_{ik}^{(x)} \|.$$

Il pfaffiano di questo è una forma algebrica di grado p nelle r_0, \dots, r_x ; la indicheremo, scelto opportunamente il segno, con

$$\Sigma \frac{p!}{h_0! \dots h_x!} I_{h_0 \dots h_x} r_0^{h_0} \dots r_x^{h_x},$$

la somma essendo estesa a tutti i gruppi di numeri interi non negativi h_0, \dots, h_x che danno per somma p . Ora si trova col ragionamento del numero 6 che

$$[\Phi_0^{h_0} \dots \Phi_x^{h_x}] = p! I_{h_0 \dots h_x},$$

dove il simbolo a primo membro indica il numero delle intersezioni di $p = h_0 + \dots + h_x$ varietà a $p-1$ dimensioni, di cui h_0 scelte nel sistema continuo $\{\Phi_0\}, \dots, \{\Phi_x\}$.

8. Le funzioni intermediarie considerate sinora hanno il determinante $\delta > 0$. Accenniamo rapidamente alle particolarità che si presentano se $\delta = 0$ e quindi $\| m_{ik} \| = 0$. Per limitarci al solo caso che interessi, supponiamo che la (1) sia ancora una matrice di Riemann, cioè che essa possegga,

⁽¹⁾ Scorza (loc. cit. in I), § 3 della Parte prima.

oltre la forma alternata (7) che è ora degenere, una forma alternata non degenere; la matrice è in tal caso (Scorza) singolare ed impura, ed è sempre collegata con una varietà abeliana V_p . Supponiamo poi che la caratteristica del determinante $\|m_{ik}\|$ sia $2q$ dove $0 < q < p$.

Allora con una opportuna trasformazione unimodulare sui periodi (1) e colla sostituzione, in luogo delle primitive variabili u , di convenienti loro combinazioni lineari U (cfr. I, n. 3), si trova che, dei p integrali di differenziale totale $\int dU_i$ annessi alla varietà V_p , i primi q costituiscono un sistema regolare di q integrali riducibili con $2q$ periodi. Le equazioni $U_1 = \text{cost.}, \dots, U_q = \text{cost.}$ definiscono entro V_p una congruenza ∞^q di varietà algebriche w a $p - q$ dimensioni, di cui una sola passa per un punto generico di V_p . Le stesse trasformazioni applicate alla primitiva funzione intermediaria $\varphi(u)$, seguite, se occorre, dalla moltiplicazione per un esponentiale ad esponente quadratico nelle U , mutano la φ in una nuova funzione intermediaria $\varphi_2(U_1, \dots, U_p)$ che si riconosce dipendere dalle sole variabili U_1, \dots, U_q . Si conclude dunque che la varietà intermediaria a $p - 1$ dimensioni rappresentata dalla equazione $\varphi(u) = 0$ o $\varphi_2(U) = 0$ è, nelle ipotesi attuali, formata da ∞^{q-1} varietà w della congruenza sudetta.

Paleontologia. — *Silicospongie fossili della Liguria occidentale.* Nota del Socio CARLO DE STEFANI⁽¹⁾.

IV.

EOCENE.

Strati inferiori.

Le rocce Triassiche e quelle ritenute Infraliassiche sono coperte da grande massa di rocce che io ritengo Eoceniche, tanto nei versanti della Polcevera e della Scrivia, quanto nella regione situata più ad Occidente. Le rocce di quest'ultima regione sono da altri attribuite al Permiano e da altri al Giura. Descriverò i fossili trovativi in ambedue le regioni; ma primieramente indicherò quelli trovati negli strati più antichi immediatamente sovrastanti al Trias ed all'Infralias, poichè, per avventura, potrebbero appartenere ad età geologica alquanto diversa da quella degli strati più alti. Debbo però soggiungere che io mi sono occupato a cercare fossili solo nella regione occidentale cristallina, quindi anche negli strati più alti di essa, ma non già in quelli più alti della regione eocenica orientale, meno o punto metamorfica, la cui età non è contestata.

⁽¹⁾ Presentata nella seduta del 16 gennaio 1921.

Valle dell'Iso.

Fra le rocce d'età incerta sarebbe anche il Calcare, o Cipollino, o Calceschisto molto siliceo che sta nella valle dell'Iso ad occidente del *Grezzone* del Trias superiore della ellissoide d'*Isoverde* fra quello e il Diabase. Siccome però la roccia è strettamente connessa con l'Eocene così mi parve unirla alla parte inferiore di questo terreno. Il detto Calcare siliceo (*Calcite*, *Quarzo*, *Silice idrata*, *Sericite*, *Pirite*, *Limonite*, ciuffi di *Rutilo*) è grigio cupo con venette quarzose e calcitiche normali agli strati. Presentasi un intreccio hexactinico dictyonale di almeno 3 ordini, con allineamento regolare, a volte radiale; ma con maglie quadrate o parallelogramme alquanto irregolari, meglio visibile dove sono convertite in *Limonite*. Sono senza spinosità e senza *Lychnische*, quantunque a 405 D, sembrirebbe vedere le une e le altre nelle *Macrosclere*, probabilmente per effetto di corrosioni. Certe maglie più grandi anche poligonali e a losanga, qualora non derivino da rottura delle altre, accennerebbero a piccole cavità cavediali. L'interno delle maglie convertite talora in *Calcite* è occupato spesso da *Limonite* o da *Quarzo*. Questo fatto, e la diversità di orientazione del *Quarzo* stesso fanno sì che la distribuzione delle maglie si fa meglio distinta al Polariscopio.

Trattandosi, come in ogni altro dei casi osservati, di esemplari frammentizi dei quali non vedesi la forma esterna, torna male distinguere fra i canali acquiferi quali sieno i canali inalanti o *Epirhize* e quali gli esalanti o *Aporhize* con le relative aperture (*Ostia* e rispettivamente *Postica*); però tenendo conto, come già dissi nell'introduzione, che la quiete nel fondo dei mari, poco o punto deve avere disturbato la situazione originaria, possiamo ritenere che nel caso delle *Dictyoninae* i canali inalanti fossero paralleli al fondo e ai sedimenti e successivamente alla stratificazione, e che i canali esalanti siano quelli normali cioè presso a poco verticali al fondo.

Quanto alla forma di organismi così delicati, devesi considerare che quella può essere stata alterata specialmente nel senso orizzontale da pressioni verticali sopravvenienti, come fu constatato in altri giacimenti di *Spongiari*; perciò cavità circolari, compresse, possono essere ridotte ellittiche od a losanga per rottura dei margini. Anche questa è una difficoltà della quale occorre tener conto nell'esame dei nostri esemplari. Con questi concetti e con queste riserve valevoli per tutti gli esemplari descritti dirò che in quelli della presente località vi sono *Ostia* puntiformi di piccole *Epirhize* in mezzo all'intreccio conformato a minutissime losanghe o ellissi con l'asse maggiore parallelo alle stratificazioni. Eran queste le forme che a prima vista mi davano l'idea di piccole *Nummuliti* lenticolari. Vi sono poi *Ostia* maggiori o *Postica* di *Aporhize* circolari con due o tre circoli periferici concentrici e con reticolo radiale fra essi, come pure attorno al circolo più esterno, caratteri questi non notati altrove.

Talora intorno a queste *Aporhize* sono 6 o 7 raggi angolosi, stellari con gli apici diretti all'esterno delle *Postica*. Sono ben distinte *Exactinia* parenchimali, rare *Diactinia*, *Oxyhexactinia* e qualche *Pentactinia* dermale, forse una *Clavula*: placche dermali o gastrali con forellini irregolari ravvicinabili p. es. a quelle delle *Aphrocallistes* Gray, Cretacee e viventi, le quali però hanno le maglie prevalentemente triangolari.

Trattando con acido cloridrico oltre il tessuto meglio conservato nella parte limonitica, rimane un delicatissimo intreccio quarzoso di prismi piramidati sostituiti alla Silice colloide per modo che le singole Spicole restano ingrossate ed alterate: pure il tessuto hexactinico rimane in qualche breve tratto visibile ne' suoi più minimi elementi. Vedesi pure in negativa qualche *Oxyhexactinia* calcitica, forse di *Lyssacina* rimasta vuota nell'intreccio quarzoso. Si notano tubi di *Aporhize* verticali che terminano cechi in mezzo a tessuto hexactinico ed *Epirhize* oblique o normali alle precedenti, più o meno serpeggianti. La specie è dunque una *Hexasterosa* che per l'intreccio relativamente regolare si potrebbe paragonare al genere vivente e Cretaceo *Hexactinella* Carter, che però ha le spicole spinose.

Nell'intreccio siliceo notasi qualche rhabdo di *Megamorina* ed in quello quarzoso acidulato vidi un evidente *Pinakide* di *Tetractinella*.

Nella parte calcarea sono oscure tracce di *Orbulina* e *Biloculina*.

Il fossile ad ogni modo non dà precise indicazioni di età, salvo l'esclusione del Paleozoico.

Cairo.

Fra gli strati eocenici che direttamente o quasi succedono al Grezzone triassico, assai degno di nota è il ritrovamento delle Fornaci di Cairo sulla sinistra della Bormida presso il passaggio a livello della ferrovia. Ivi sotto alla lunga zona del Trias fossilifero che principiando alle Fornaci traversa senza discontinuità la Bormida e finisce al M. Gos, sotto come dicevo è uno Schisto nero che avrebbe potuto credersi Carbonifero con noduli di quarzo candido, alcuni direbbero di Quarzo grasso. Cotale Schisto, con la stessa situazione stratigrafica traversa la Bormida e sulla destra passa a Calceschisti scuri, pur sottostanti al Trias, ricoprenti a loro volta Gabbri e Serpentine estese a valle al di sotto dell'Oligocene che invade tutta la regione. Avevo già indotto che siffatta successione insolita di strati dal Trias in poi era effetto di un locale, esteso, rovesciamento e che gli strati stratigraficamente sottostanti al Trias appartenevano all'Eocene; il ritrovamento della Silicospongia fu coerente a questo concetto.

Lo schisto nero sopra detto, bene stratificato, a strati sottili ma irregolari e scontorti presenta Quarzo, abbondante Sericite, rara Clorite, Limonite pseudomorfa di Pirite nella parte schistosa, aciculi di Apatite tendente al verde, rarissimi prismi di Tormalina riconoscibili all'alto pleocroismo ed

alla completa estinzione a 0° ed un groviglio di microliti capillari di Rutilo intorno alle zonule più scure. Osservando i noduletti quarzosi con forte lente, e in sezioni, si vede che sono frammenti di una *Hexasterophora Lychniscosa*, a maglie dictyonali, regolari, minutissime, eventualmente visibili anche in brevi tratti della parte schistosa nella quale puntini bianchi, quarzosi, in serie, rispondono al centro di maglie hexactiniche o di canaletti acquiferi. Le Megasclere, meno visibili fuori del Quarzo, sono regolari, a maglie quadrate, con Lychnische ben distinte; le microsclere, pur regolari, sono più visibili nella parte limonitica. Sulla superficie *Ostia* puntiformi ed altre aperture circolari di canaletti esalanti con intreccio radiale. Mai *Amphidischis*, *Scopulae*, *Clavulae*, *Uncini*. Era probabilmente una *Lychniscosa inermia* come tante altre notate nella massa degli schisti che ho attribuito all'Eocene.

Geologia. — *Cenni di un ordinamento sistematico delle Stimate geologiche.* Nota del Socio A. ISSEL⁽¹⁾.

L'ordinamento razionale di una serie di oggetti naturali, più o meno collegati fra loro da caratteri comuni, o di un complesso di fenomeni dotati di un certo grado di affinità, suol essere frutto di intensa indagine e costituisce un fattore efficace a pro' della didattica, massime se sia accompagnato da una opportuna terminologia sistematica. Inoltre, e su questo punto importa insistere, esso è suscettibile di promuovere notevoli progressi della disciplina cui si riferisce.

Chi non vede, ad esempio, quanto sia agevolato lo studio della chimica dalla classificazione razionale dei composti e della terminologia che ne consegue? Chi non è persuaso delle scoperte suscite in ordine alla teoria delle combinazioni e in numerose applicazioni dal principio di cui tengo discorso?

Inspirato da questo concetto, già tentai di metterlo in pratica nel campo della geologia, col tentativo di un ordinamento logico delle icoliti o pietre figurate, e credo non senza vantaggio, malgrado le imperfezioni che non seppi evitare⁽²⁾. Nella Nota che sottopongo oggi all'apprezzamento dei Colleghi, mi faccio a tracciare le prime linee di un ordinamento delle *Stimate geologiche*.

Non mi mancherebbero gli elementi per lo svolgimento, se non integrale, almeno esteso della materia; ma, a causa delle difficoltà materiali che per me si oppongono alla pubblicazione di una voluminosa Memoria⁽³⁾, mi contenterò di esporre uno schema assai succinto.

(¹) Presentata nella seduta del 6 febbraio 1921.

(²) *Prime linee di un ordinamento sistematico ecc.* Memorie della R. Accademia dei Lincei, serie 5^a, vol. XI, fasc. 11°. Roma, 1916.

(³) Alludo principalmente alla crisi dell'industria tipografica.

Prima di tutto, qual'è propriamente il significato che attribuisco alla espressione che campeggia nel titolo della mia Nota?

Le stimate geologiche sono per me le tracce, i segni, in certo modo i relitti, di mutamenti di carattere fisico-chimico, meccanico e talvolta anche biologico, indotti *localmente* nelle masse rocciose, d'ordinario alla superficie, per opera di fenomeni geologici attuali o riferibili a tempi non remotissimi.

Non si tratta dei corrugamenti orografici e quindi dei tipi svariatissimi di giogaie, monti singoli, acrocori, e nemmeno di pianure, valli, catini e in genere di depressioni emerse e sommerse; non vi sono contemplate le forme delle terre emerse, i varî tipi di rive più o meno articolate, le formazioni d'origine ignea ed aqurea, i fenomeni precipui relativi al vulcanismo in genere, al metamorfismo regionale, alle grandi soluzioni di continuità della corteccia terrestre, nè tampoco si comprendono fra le stimate i mutamenti cagionati dalla morfologia terrestre, dai ghiacciai, dai bradisismi. Prescindo finalmente dalle tenui alterazioni temporarie che si producono sotto ai nostri occhi alla superficie dei ghiacci e nelle distese di sabbie desertiche agitate dai venti. Intendo occuparmi invece, sotto l'accennata denominazione, di certi caratteri propri alle meteoriti, di segni osservati sulle rocce colpite dalla folgore, di tracce d'erosione lasciate sulle superficie rocciose per opera delle correnti atmosferiche e delle acque meteoriche o correnti, delle cavità praticate meccanicamente o per effetto di soluzione dalle acque superficiali, delle incrostazioni e degli intonachi abbandonati per opera delle acque mineralizzate, in ispecie di quelle che raggiungono temperatura più alta dell'ordinaria, di certi casi di metamorfismo locale, delle sublimazioni e delle rubefazioni vulcaniche, delle piccole soluzioni di continuità o leptoclasti dovute a pressioni o trazioni esercitate localmente sulle rocce, dei segni di frane e di carreggiamento lasciati alla superficie di alcune formazioni, delle scalfitture (veri sismogrammi naturali) tracciate sulle superficie rupestri per fatto dei terremoti, dei solchi d'erosione e dei fori di litodomì che accusano spostamenti nel livello rispettivo del mare e delle terre emerse, delle strie, dei solchi, delle aree levigate per opera di ghiacci emersi o sommersi, delle figure di viscosità, delle impressioni radiculari, delle ichniti e d'altri segni d'origine organica, non in quanto si riferiscono a peculiari tipi di animali e di piante, ma perchè attestano condizioni fisiche speciali proprie ai sedimenti in cui si osservano.

Le stimate geologiche non costituiscono individui ben definiti, come spesso si verifica nelle icoliti; non presentano vere unità specifiche, come i fossili e i minerali, e perciò si prestano assai meno di questi ad essere inquadrare nelle divisioni e suddivisioni tassonomiche, e non è facile assegnare a ciascun gruppo il posto che gli compete.

Una prima distinzione, di carattere artificiale, sarebbe quella da stabilirsi in base al fatto che si danno stimate nelle quali si verificò:

a) eliminazione di materia dovuta, secondo i casi, ad azione meccanica, chimica o biologica (esempi: solchi e strie glaciali, fori di litodomii);

b) accrescimento di materia, suscettibile di essere attribuito a deposito idrotermale o di acque mineralizzate, a sublimazione od anche a fenomeno biologico (esempi: incrostazioni di geyserite e di pelagosite);

c) alterazione di materia, che consegue, sia da fusione, sia da pseudomorfosi, sia dalla introduzione di elementi che non preesistevano nella matrice, sia da mutamenti nella struttura. Si tratta per lo più di fenomeno superficiale, ma può raggiungere una certa profondità (esempi: formazione di minerali nuovi a contatto delle intrusioni di rocce ignee);

d) compressione di sedimenti, nei casi in cui la compressione o il costipamento conferirono ad un deposito caratteri morfologici o struttura peculiare (esempi: cristallinità e scistosità per effetto di dinamometamorfismo).

Ognun vede come da siffatta enumerazione possono risultare quattro gruppi di stimate, ciascuno dei quali comprende tracce di fenomeni disperatissimi; ma il numero loro non è certo adeguato al bisogno.

L'ordinamento da preferirsi è ben diverso, e deve, in quanto sia possibile, inspirarsi ai principî del metodo naturale. Convien scegliere per base, in altre parole, i caratteri precipui, quelli specialmente fondati sulla genesi.

Il mio tentativo mi ha condotto a proporre, per ora, nove divisioni principali di stimate, ciascuna delle quali si scinde in un certo numero di sezioni; mi riserbo poi di proporre una ulteriore suddivisione delle sezioni in varietà e mutazioni; ma ciò non sarebbe possibile nello spazio concesso ad una Nota preliminare.

Ecco, ora, ridotto nei minimi termini, lo schema dell'ordinamento proposto:

Classe 1^a — *Stimate cosmiche*. — Sono quelle che si osservano esclusivamente nelle meteoriti, e si distinguono, in base agli studî di Daubrée, nelle sezioni qui appresso enumerate: *per fusione*, *per attrito*, *per ossidazione*, *per frantumazione*, *per erosione*.

Classe 2^a — *St. atmosferiche*. — Comprendono le sezioni segnalate con questi termini: *per logoramento*, *per disintegrazione*, *per idratazione*, *per piovosità*, *per fulminazione*, *per alterazione*, *per disseccamento*, e comportano parecchie suddivisioni di terzo ordine.

Classe 3^a — *St. idrosferiche*. — Sono dovute alle acque marine e continentali; comprendono le sezioni precipue segnalate colle espressioni: *per erosione*, *per soluzione*, *per trapanazione*, *per disfacimento*, *per increspatura* con diverse varietà.

Classe 4^a — *St. idrominerali*. — Si possono scindere in due gruppi principali, secondochè sono formate da acque termali e non termali, le quali si distinguono poi in marine e continentali. Sezioni più notevoli: *per evapora-*
zione, *per precipitazione*, *per reazione*, con parvenze e modalità più o meno distinte.

Classe 5^a — *St. vulcaniche.* — Sezioni principali: *per sublimazione, per vetrificazione, per rubefazione, per reazione.*

Classe 6^a — *St. tectoniche.* — Sezioni più importanti: *per flessione, per solleramento, per frattura, per rigetto, per terremoto, per frana, per carreggiamento ecc.* Parecchie varietà ben distinte.

Classe 7^a — *St. plutoniche.* — Sezioni: *per termometamorfismo, per dinomorfismo, per pseudomorfosi, per sfrantumazione.* Non mancano mutazioni di ciascun gruppo.

Classe 8^a — *St. glaciali.* — Sezioni: *per attrito* (con modalità diverse e varietà subacquee ed emerse), *per compressione* (nei così detti *pavimenti glaciali*).

Classe 9^a — *St. fisiologiche.* Si tratta delle orme di vertebrati o ichniti, delle tracce di reptazione e d'altri segni lasciati sopra sedimenti molli, sommersi ed emersi, dall'incedere di animali strisciantei o natanti.

Senonchè questi relitti figurano tra le stimate in quanto accusano condizioni speciali dei depositi sui quali si osservano, e non dal punto di vista della paleontologia. Vi si connettono, in una sezione propria, le *impronte radicularei*; a titolo di appendice vi si potrebbero aggregare le *figure di viscosità*, le *dendriti* ed altre impronte fisiche con parvenza di fossili⁽¹⁾; ma non si esclude che le accennate figure, come le dendriti sieno suscettibili di collocarsi opportunamente in altra classe.

Mi sono chiesto se non fosse il caso di attribuire a ciascuna divisione di primo grado un nome speciale derivato dal greco o dal latino, affine di agevolare l'intento didattico che è nei miei voti; ma, dopo matura riflessione, mi sono arretrato dinanzi al timore di accrescere la complicazione del gergo geologico già tanto farraginoso. Mi è parso opportuno tuttavolta di introdurre nella terminologia delle stimate alcune voci nuove; ciò affine di eliminare circonlocuzioni superflue: dico, ad esempio, *sismoliti* gli esemplari di rocce che presentano strie o scalfitture dovute ad attriti provocati dal terremoto; denomino *gliptoliti* le superficie rupestri solcate, incise o levigate dai ghiacciai; *talassoliti* i sedimenti che presentano tenui rughe o crespe prodotte dal moto ondoso; *udoliti* i depositi che offrono piccole cavità cagionate dalla caduta di gocce di pioggia.

(1) *Figure di viscosità ed impronte radicularei.* Ateneo Ligure, fasc. di agosto-dicembre. Genova, 1889.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Su due proposizioni di J. W. Lindeberg e E. E. Levi, nel Calcolo delle variazioni.* Nota II di LEONIDA TONELLI, presentata dal Socio S. PINCHERLE⁽¹⁾.

Per gli integrali in forma non parametrica

$$(1) \quad I_c = \int_c f(x, y, y') dx,$$

relativi cioè alle curve date da un'equazione $y = y(x)$, il Lindeberg ha dimostrato la proposizione analoga a quella da lui stesso stabilita per gli integrali in forma parametrica e da noi riportata nella Nota I⁽²⁾ limitandola a quelle curve per le quali la funzione $y'(x)$ corrispondente ha la derivata prima sempre, in modulo, inferiore ad uno stesso numero; con altre parole, ha provato che:

“ Se C_0 è una curva la cui funzione corrispondente $y_0(x)$ è continua insieme con le sue due prime derivate, e se su di essa valgono le condizioni di Legendre e di Weierstrass, prese in senso stretto, scelti comunque due numeri positivi, ε e ε' , si può determinarne un altro ϱ in modo che sia sempre $I_c - I_{c_0} > 0$, per ogni altra curva ordinaria⁽³⁾ C , avente gli stessi estremi della C_0 , soddisfacente ovunque alla diseguaglianza $|y(x) - y_0(x)| < \varrho$ e tale che la lunghezza complessiva degli intervalli dell'asse x , sui quali è sempre $|y'(x) - y'_0(x)| > \varepsilon'$, risulti maggiore di ε . ”

Volendo conferire a questo enunciato tutta la generalità che ha la proposizione corrispondente del Lindeberg, relativa agli integrali in forma parametrica, è necessario di liberare l'enunciato stesso dalla condizione relativa alla limitazione del modulo della derivata $y'(x)$. Questo scopo fu raggiunto dal compianto prof. E. E. Levi, il quale superò la grave difficoltà che qui si presentava per mezzo del seguente teorema:

“ Se, in un campo finito e chiuso T di valori (x, y, y') , sono soddisfatte le condizioni $f_{yy'}(x, y, y') > 0$, $E(x, y; y', \bar{y}') > 0$, per ogni $\bar{y}' \neq y'$ [E essendo la funzione di Weierstrass relativa all'integrale (1)]; e se T_1 è un campo chiuso, contenuto in T , per il quale esiste un $\delta > 0$ tale che ogni punto di T_1 sia il punto di mezzo di un segmento di lunghezza 2δ paral-

(1) Presentata nella seduta del 5 dicembre 1920.

(2) Questi Rendiconti, pag. 19.

(3) Composta cioè di un numero finito di archi per ciascuno dei quali la $y(x)$ abbia la derivata prima finita e continua.

lelo all'asse y' e totalmente contenuto in T , allora si possono determinare due numeri positivi σ e μ per modo che, se $|y' - \bar{y}'| > \sigma$ e (x, y, y') è in T_1 , si abbia

$$(2) \quad E(x, y; y', \bar{y}') > \mu |y' - \bar{y}'|^{\nu}.$$

Dopo ciò, e ammesso che sulla curva C_0 valga la condizione di Legendre in senso stretto e che la condizione di Weierstrass sia verificata in modo da aversi, per ogni x dell'intervallo su cui è definita la $y_0(x)$, ed ogni coppia y, y' soddisfacente alle $|y - y_0(x)| < r$, $|y' - y'_0(x)| < r$ (r essendo un numero positivo, comunque piccolo) e qualunque sia $\bar{y}' \neq y'$, $E(x, y; y', \bar{y}') > 0$, la proposizione del Lindeberg, secondo quanto ha mostrato il Levi, vale indipendentemente dalla restrizione dianzi accennata.

Per estendere il teorema, così ottenuto, conformemente a quanto si è fatto nella Nota I, occorre una preliminare estensione del teorema del Levi sopra riportato. A questo intento, ho cominciato col liberare completamente il teorema del Levi dalla condizione $f_{y'y'}(x, y, y') > 0$, e ne ho poi ottenuta questa generalizzazione:

« Se T è un campo limitato e chiuso di punti (x, y, y') , ed esiste un numero positivo δ tale che, per ogni (x, y, y') di T e ogni \bar{y}' soddisfacente alla $|y' - \bar{y}'| \leq \delta$, sia $E(x, y; \bar{y}', \tilde{y}') > 0$ per qualunque $\tilde{y}' \neq \bar{y}'$, scelto ad arbitrio un numero $\sigma > 0$, se ne possono determinare altri due ν e μ , pure > 0 , in modo che, per ogni numero q tale che sia $|q - f(x, y, y')| \leq \nu$, si abbia

$$f(x, y, \tilde{y}') - f(x, y, y') - q(\tilde{y}' - y') > \mu |\tilde{y}' - y'|^{(1)},$$

per tutti i punti (x, y, y') di T e tutti gli \tilde{y}' soddisfacenti alla $|y' - \tilde{y}'| \geq \sigma$.

Servandomi di questa generalizzazione del teorema del Levi, sono riuscito a dimostrare le due proposizioni che seguono, le quali forniscono due successive estensioni del teorema del Lindeberg:

1°) « Se C_0 è una curva di equazione $y = y_0(x)$, ($a_0 \leq x \leq b_0$), con $y_0(x)$ funzione assolutamente continua e:

a) per ogni punto \bar{x} di (a_0, b_0) in cui esiste finita la $y'_0(x)$ si può determinare un numero positivo $\varrho(\bar{x})$ tale che, per tutte le terne (x, y, y') soddisfacenti alle $|x - \bar{x}| \leq \varrho(\bar{x})$, $|y - y_0(\bar{x})| \leq \varrho(\bar{x})$, $|y' - y'_0(\bar{x})| \leq \varrho(\bar{x})$, e per qualsiasi $\tilde{y}' \neq y'$, sia $E(x, y; y', \tilde{y}') > 0$;

b) per ogni altro punto \bar{x} di (a_0, b_0) dove la $y'_0(x)$ non esiste o è infinita, si hanno due numeri $\bar{y}'(\bar{x}), \varrho(\bar{x})$, il secondo dei quali positivo, in modo che soddisfatte le $|x - \bar{x}| \leq \varrho(\bar{x}), |y - y_0(\bar{x})| \leq \varrho(\bar{x}), |y' - \bar{y}'(\bar{x})| \leq \varrho(\bar{x})$, e per qualsiasi $\tilde{y}' \neq y'$, sia ancora $E(x, y; y', \tilde{y}') > 0$;

scelti ad arbitrio due numeri positivi σ e λ , è sempre possibile di

(1) Per $q = f(x, y, y')$, questa disegualanza coincide con la (2).

determinare altri due ϱ ed ε in modo che si abbia $I_c - I_{c_0} > \varepsilon$, per ogni curva C di equazione $y = y(x)$ ($a \leq x \leq b$), con $y(x)$ funzione assolutamente continua, la quale appartenga propriamente all'intorno (ϱ) della C_0 ⁽¹⁾ e sia tale che l'insieme dei punti dell'asse x soddisfacenti alla $|y'(x) - y'_0(x)| \geq \varrho$ risulti di misura $\geq \lambda$.

2°) « Se C_0 è la stessa curva del teorema precedente e su essa sono ancora verificate le condizioni $a)$ e $b)$; se, inoltre, esistono due numeri positivi \varLambda e μ , in modo che, per tutti gli \bar{x} considerati nella condizione $a)$ sia sempre $\varrho(\bar{x}) \leq \varLambda$, $E(\bar{x}, y_0(\bar{x}); y'_0(\bar{x}), y'_0(\bar{x}) \pm \varrho(\bar{x})) \geq \mu$; scelto ad arbitrio un $\delta > 0$, è sempre possibile di determinare altri due numeri positivi ε e ϱ , tali che si abbia $I_c - I_{c_0} > \varepsilon$, per tutte le curve C , di cui sopra, appartenenti propriamente all'intorno (ϱ) della C_0 e soddisfacenti alla $L - L_0 \leq \delta$, L e L_0 essendo le lunghezze delle C e C_0 , rispettivamente ».

In questo secondo enunciato, alla diseguaglianza $L - L_0 \geq \delta$ può sostituirsi l'altra

$$\int_{a'}^{b'} |y'(x) - y'_0(x)| dx \geq \delta,$$

dove (a', b') rappresenta l'intervallo comune ai due $(a_0, b_0), (a, b)$.

Tanto in 1°) che in 2°) le condizioni $a)$ e $b)$ possono sostituirsi con le altre due: che sia sempre $f_{y'y'}(x, y, y') > 0$ e che esista un numero positivo m tale che, in tutto un intorno della C_0 e per ogni y' in modulo maggiore di uno stesso numero positivo, sia $|y'|^3 f_{y'y'}(x, y, y') \geq m$. Queste due condizioni sono, in particolare, soddisfatte se la funzione f è della forma $g(xy) \sqrt{1 + y'^2}$ con $g(xy) > 0$.

Ai teoremi precedenti si può aggiungere questa nuova proposizione:

« Se

$$J_c = \int_c g(x, y, y') dx$$

è un altro integrale del tipo (1) e C_0 è la curva più sopra indicata, ed esiste un numero positivo m tale che, per tutti i punti (xy) di un intorno della C_0 valga sempre la $f_{y'y'}(x, y, y') \geq mg_{y'y'}(x, y, y')$, per qualsiasi y' , preso ad arbitrio un numero positivo δ se ne possono determinare altri due ε e ϱ in modo che, per ogni curva $C: y = y(x)$, ($a \leq x \leq b$), con $y(x)$ funzione assolutamente continua, la quale appartenga propriamente all'intorno (ϱ) della C_0 e soddisfi alla $J_c - J_{c_0} \geq \delta$, si abbia $I_c - I_{c_0} > \varepsilon$.

(1) Ciò vuol dire che, per ogni x comune ai due intervalli $(a_0, b_0), (a, b)$ è $|y(x) - y_0(x)| < \varrho$, e che i punti i quali appartengono all'uno o all'altro dei due intervalli, senza appartenere ad entrambi costituiscono (al più) due segmenti di lunghezza $< \varrho$, e ciascuno degli archi delle curve C_0 e C che corrispondono a questi segmenti è interno al cerchio di raggio ϱ avente per centro l'estremo corrispondente di C_0 .

Meccanica. — *Sulla variazione dell'energia cinetica di un sistema semi-rigido ruotante attorno ad un punto fisso quando sia nullo il momento rispetto a questo punto delle forze esterne.* Nota di ORAZIO LAZZARINO, presentata dal Corrisp. R. MARCOLONGO⁽¹⁾.

In una Nota precedente⁽²⁾, alla quale mi riferisco per le notazioni e per la parte bibliografica, ho stabilito con procedimento breve e semplicissimo le equazioni assolute del moto attorno ad un punto fisso di un sistema materiale costituito da un nucleo solido ricoperto da liquido viscoso incompressibile e avente nel suo interno un numero qualunque di cavità, di forma qualunque, riempite da liquidi viscosi compressibili a densità diverse e comunque variabili.

In questa Nota, supponendo sempre i liquidi interni viscosi e complessibili, mi propongo di studiare la variazione dell'energia cinetica del sistema col variare del tempo quando sia nullo il momento rispetto al punto fisso delle forze esterne.

In queste ipotesi, le equazioni intrinseche del problema, stabilite nella Nota precedente, assumono rispettivamente la forma:

$$(I) \quad \alpha\Omega' + \Omega \wedge (\alpha\Omega + M) + M'_r = 0$$

$$(II) \quad a = -mP'_r$$

$$(III) \quad F_t = F_n - F_n \times n \cdot n = mP'_r = -a$$

$$(IV) \quad P'_r \times n = [P' - \Omega \wedge (P - 0)] \times n = 0$$

$$(V) \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} P' = 0$$

$$(VI) \quad \frac{dP'}{dt} = F - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \operatorname{grad} \operatorname{div} P' + \nu A' P' = \frac{\partial P'}{\partial t} + \frac{dP'}{dP} P'$$

dove le derivate rispetto al tempo t sono indicate con apici e riferendosi sempre al punto fisso 0, α rappresenta l'omografia d'inerzia della parte rigida, Ω il vettore della velocità istantanea di rotazione del sistema, M il momento dell'impulso relativo al moto della parte fluida, M'_r la velocità relativa di M , a il vettore della forza di attrito in un punto qualunque di contatto, P' e P'_r i vettori della velocità assoluta e relativa di un punto generico P delle masse fluide, F_n il vettore della pressione per unità di superficie esercitata dal fluido, p l'intensità della pressione specifica unitaria relativa allo stato di equilibrio, n un vettore unitario perpendicolare nei

⁽¹⁾ Presentata nella seduta del 5 dicembre 1920.

⁽²⁾ O. Lazzarino, *Sulle equazioni del moto di rotazione attorno ad un punto fisso di un solido avente un numero qualunque di cavità riempite da liquidi viscosi a densità diverse e comunque variabili.* Questi Rend., vol. XXX, 1^o sem., pag. 13.

singoli punti di contatto alle pareti σ delle cavità e diretto verso l'esterno, ϱ le densità dei fluidi, λ e μ le solite costanti di Lamé, ν il rapporto μ/ϱ .

Si noti che sulla grandezza del coefficiente m , circa la quale le varie teorie sono discordi, non è necessario fare alcuna ipotesi particolare.

1. Variazione dell'energia cinetica del sistema.

Moltiplicando la (I) scalarmente per Ω e tenendo presente che α è dilatazione, si ha

$$(1) \quad (\Omega \times \alpha \Omega)' = -2\Omega \times \mathbf{M}'_r = -2\Omega \times \mathbf{M}'.$$

Inoltre, ammettendo che le forze \mathbf{F} agenti nei punti P delle masse fluide derivino da un potenziale π ponendo $\pi = \int_{\varrho}^{dp}$, la (VI) può anche scriversi

$$(VI') \quad \mathbf{P}'' = \text{grad}(\pi - U) + \frac{\lambda + \mu}{\varrho} \text{grad div } \mathbf{P}' + \nu \mathcal{A}' \mathbf{P}'.$$

Ora, moltiplicando la (VI') scalarmente per \mathbf{P}'_r e integrando rispetto a tutti gli spazi τ delle h cavità del sistema, si ottiene

$$(2) \quad \sum_1^h \int_{\tau} \mathbf{P}'' \times \mathbf{P}'_r \cdot d\tau = \sum_1^h \int_{\tau} [\text{grad}(\pi - U) + \frac{\lambda + \mu}{\varrho} \text{grad div } \mathbf{P}'] \times \\ \times \mathbf{P}'_r \cdot d\tau + \sum_1^h \int_{\tau} \nu \mathcal{A}' \mathbf{P}' \times \mathbf{P}'_r \cdot d\tau.$$

È facile dimostrare che la prima sommatoria di integrali del secondo membro della (2) è nulla. Infatti, per formole note ⁽¹⁾, detta sommatoria può spezzarsi nel seguente modo

$$(a) \quad \sum_1^h \int_{\sigma} [\pi - U + \frac{\lambda + \mu}{\varrho} \text{div } \mathbf{P}'] \mathbf{n} \times \mathbf{P}'_r \cdot d\sigma + \\ + \sum_1^h \int_{\tau} I_1 \left[\frac{d\mathbf{P}'_r}{dP} (\pi - U + \frac{\lambda + \mu}{\varrho} \text{div } \mathbf{P}') \right] d\tau$$

dove la prima sommatoria s'intende estesa a tutte le superficie σ che racchiudono le h cavità del sistema. Ora, tenendo presente la (IV), si vede immediatamente che la prima sommatoria della (a) risulta nulla; quanto alla seconda si osserva che essa può scriversi successivamente

$$\begin{aligned} \sum_1^h \int_{\tau} I_1 \left[\frac{d\mathbf{P}'_r}{dP} (\pi - U + \frac{\lambda + \mu}{\varrho} \text{div } \mathbf{P}') \right] d\tau &= \\ &= \sum_1^h \int_{\tau} (\pi - U + \frac{\lambda + \mu}{\varrho} \text{div } \mathbf{P}') \cdot I_1 \frac{d\mathbf{P}'_r}{dP} d\tau = \\ &= \sum_1^h \int_{\tau} (\pi - U + \frac{\lambda + \mu}{\varrho} \text{div } \mathbf{P}') \text{div } \mathbf{P}'_r \cdot d\tau = \\ &= \sum_1^h \int_{\sigma} (\pi - U + \frac{\lambda + \mu}{\varrho} \text{div } \mathbf{P}') \cdot \mathbf{P}'_r \times \mathbf{n} \cdot d\sigma \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Cfr. C. Buralli Forti et R. Marcolongo, *Analyse vectorielle générale* [ediz. 1912, I, pag. 111 (2)]. Questo testo sarà indicato in seguito con la sigla AVG.

e quindi, risultando anch'essa nulla per la (IV), si ha quanto si voleva dimostrare. Dopo ciò, la (2) porge

$$(3) \quad \sum_{\tau}^h \int_{\tau} P'' \times P'_r \cdot d\tau = \sum_{\tau}^h \int_{\tau} \nu \mathcal{A}' P' \times P'_r \cdot d\tau.$$

Ora dal primo membro della (3), moltiplicando per ϱ e ponendo $P'_r = P' - \Omega \wedge (P - O)$, si ha

$$\begin{aligned} \sum_{\tau}^h \int_{\tau} P'' \times P'_r \cdot \varrho d\tau &= \sum_{\tau}^h \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\tau} P'^2 \cdot \varrho d\tau - \Omega \times \sum_{\tau}^h \int_{\tau} (P - O) \wedge P'' \cdot \varrho d\tau = \\ &= \sum_{\tau}^h \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\tau} P'^2 \cdot \varrho d\tau - \Omega \times M', \end{aligned}$$

e quindi, tenendo conto della (1) e ponendo ancora

$$(4) \quad T = \frac{1}{2} \left[\sum_{\tau}^h \int_{\tau} P'^2 \cdot \varrho d\tau + \Omega \times \alpha \Omega \right],$$

si può ancora scrivere

$$(5) \quad \sum_{\tau}^h \int_{\tau} P'' \times P'_r \cdot \varrho d\tau = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \left[\sum_{\tau}^h \int_{\tau} P'^2 \cdot \varrho d\tau + \Omega \times \alpha \Omega \right] = \frac{dT}{dt}.$$

Allora, osservando che la T , definita dalla (4), rappresenta l'energia cinetica di tutto il sistema e ricordando che è $v = \mu/\varrho$, dalle (3) e (5) si deduce immediatamente che « la variazione nell'unità di tempo dell'energia cinetica di tutto il sistema può essere espressa dalla formola »

$$(6) \quad \frac{dT}{dt} = \sum_{\tau}^h \int_{\tau} \mu \mathcal{A}' P' \times P'_r \cdot d\tau.$$

2. Generalizzazione di una notevole formola di Joukovsky.

Il signor Joukovsky (1), trattando la teoria del moto di un solido avente una cavità riempita da liquido viscoso *incompressibile*, dimostrò l'esistenza di una notevole formola che dà la variazione dell'energia cinetica col variare del tempo nell'ipotesi che le forze dell'attrito di contatto fra liquido e solido seguano la nota legge di Stokes. Il signor Stekloff (2), mantenendo l'ipotesi della *incompressibilità* del liquido, dimostrò la formola per qualunque altra ipotesi sulla grandezza delle forze di attrito. Qui, partendo dalla (6), riesco ad estendere la formola di Joukovsky al caso più generale di liquidi viscosi *compressibili* e per qualunque ipotesi sulla grandezza delle forze di attrito fra liquidi e solido.

(1) N. Joukovsky, *Sul moto di un corpo solido che ha una cavità riempita da un liquido incompressibile*. S. Pietroburgo, 1885 (in russo), pag. 137.

(2) W. Stekloff, *Sur le mouvement d'un corps solide ayant une cavité de forme ellipsoïdale remplie par un liquide incompressible etc.* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 3^e serie, tom. I, a. 1909).

Infatti, per formole note [A. V. G. I, pag. 111 (2)], la (6) può scriversi

$$(6') \quad T' = \sum_{\tau}^h \int_{\tau} \mu A' P' \times P'_r \cdot d\tau = - \sum_{\tau}^h \int_{\sigma} \mu \left(\frac{dP'}{dP} \mathbf{n} \right) \times P'_r d\sigma - \\ - \sum_{\tau}^h \int_{\tau} \mu I_1 \left(\frac{dP'_r}{dP} K \frac{dP'}{dP} \right) d\tau.$$

Ora, supponendo nel caso più generale che l'omografia β di pressione di una qualunque delle masse fluide sia espressa da

$$(7) \quad \beta = p - 2\mu \frac{dP'}{dP} - k \cdot I_1 \frac{dP'}{dP},$$

si ha

$$\mathbf{F}_n = \beta \mathbf{n} = p \mathbf{n} - 2\mu \left(\frac{dP'}{dP} \mathbf{n} \right) - \lambda \cdot \left(I_1 \frac{dP'}{dP} \right) \mathbf{n}$$

e quindi, tenendo anche conto della (IV), si può scrivere

$$- \int_{\sigma} \mu \left(\frac{dP'}{dP} \mathbf{n} \right) \times P'_r \cdot d\sigma = \frac{1}{2} \int_{\sigma} \left[\mathbf{F}_n - p \mathbf{n} + \lambda \left(I_1 \frac{dP'}{dP} \right) \mathbf{n} \right] \times P'_r \cdot d\sigma = \\ = \frac{1}{2} \int_{\sigma} \mathbf{F}_n \times P'_r \cdot d\sigma.$$

Inoltre, tenendo conto delle (II) e (III), si ricava

$$\frac{1}{2} \int_{\sigma} \mathbf{F}_n \times P'_r \cdot d\sigma = \frac{1}{2} \int_{\sigma} [\mathbf{F}_t + \mathbf{F}_n \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}] \times P'_r \cdot d\sigma = \\ = \frac{1}{2} \int_{\sigma} \mathbf{F}_t \times P'_r \cdot d\sigma = - \frac{1}{2} \int_{\sigma} \mathbf{a} \times P'_r \cdot d\sigma$$

e quindi, nel caso più generale, la (6') può scriversi

$$(8) \quad T' = - \frac{1}{2} \sum_{\tau}^h \int_{\sigma} \mathbf{a} \times P'_r \cdot d\sigma - \sum_{\tau}^h \int_{\tau} \mu I_1 \left(\frac{dP'_r}{dP} \cdot K \frac{dP'}{dP} \right) d\tau.$$

Questa è la formola cercata e sussiste evidentemente qualunque sia, nella (II), il valore del coefficiente m che caratterizza la grandezza delle forze dell'attrito di contatto fra liquidi e solido. Perciò si può concludere che « la formola di Joukovsky, sotto la forma (8) ora trovata, sussiste per liquidi viscosi compressibili, qualunque sia l'ipotesi sulla grandezza delle forze dell'attrito di contatto ». c. d. d.

Idrodinamica. — Circuitazione superficiale. II: *Sua espressione vettoriale e teoremi generali analoghi a quelli sulla ordinaria circuitazione.* Nota di MARIO PASCAL, presentata dal Correspondente R. MARCOLONGO⁽¹⁾.

È agevole scrivere il vettore della circuitazione superficiale che abbiamo definito nella Nota I⁽²⁾. Siano i, j, k tre vettori fondamentali; u, v, w le componenti del vettore \mathbf{V} della velocità; $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ i coseni direttori del vettore unitario \mathbf{n} parallelo alla normale interna alla superficie σ .

Il vettore della circuitazione superficiale è allora

$$(1) \quad \mathbf{C} = \int_{\sigma} \mathbf{V} \wedge \mathbf{n} \, d\sigma.$$

Immaginiamo ora che la superficie σ tenda, appiattendosi, a ridursi ad una porzione piana, limitata da una curva s : il moto del fluido tenderà allora a diventare un moto piano. Ugualmente i vettori $\mathbf{V} \wedge \mathbf{n}$ tendono ad essere uguali e di verso contrario per tutti i punti compresi nell'area piana limitata da s ; il modulo di $\mathbf{V} \wedge \mathbf{n}$ ha invece valori finiti per i punti del contorno. Per tali punti, \mathbf{n} giace nello stesso piano fondamentale nel quale è contenuto \mathbf{V} .

In tali condizioni l'integrale doppio (1) tenderà — a meno di un fattore infinitesimo — ad un integrale semplice esteso al contorno s .

D'altra parte il vettore $\mathbf{V} \wedge \mathbf{n}$, per ogni punto del contorno s , è normale al piano fondamentale, e l'integrale suddetto rappresenta la risultante di tali vettori paralleli. Il modulo del vettore risultante è, sul piano, uguale all'integrale del modulo di $\mathbf{V} \wedge \mathbf{n}$, esteso a s . Se \mathbf{t} è un vettore unitario parallelo alla tangente a s nel punto generico P , essendo

$$\operatorname{sen}(\mathbf{V}, \mathbf{n}) = \cos(\mathbf{V}, \mathbf{t}),$$

si ha

$$\begin{aligned} \operatorname{mod}(\mathbf{V} \wedge \mathbf{n}) &= \operatorname{mod} \mathbf{V} \cdot \operatorname{mod} \mathbf{n} \cdot \operatorname{sen}(\mathbf{V}, \mathbf{n}) = \\ &= \operatorname{mod} \mathbf{V} \cdot \operatorname{mod} \mathbf{t} \cdot \cos(\mathbf{V}, \mathbf{t}) = \mathbf{V} \times \mathbf{t}. \end{aligned}$$

(1) Presentata nella seduta del 5 dicembre 1920.

(2) M. Pascal, *Circuitazione superficiale. I: Estensione dell'ordinario concetto di circuitazione.* Questi Rendiconti, vol. XXIX, 1920, 2º sem., pag. 353.

L'integrale (1) pertanto — nelle ipotesi fatte ed a meno di un fattore infinitesimo — diventa

$$\int_s \mathbf{V} \times \mathbf{t} \, ds = \int_s \mathbf{V} \times d\mathbf{P};$$

cioè la circuitazione superficiale, al tendere della superficie ad una porzione piana limitata dalla curva s , tende all'espressione dell'ordinaria circuitazione lungo il contorno s .

2. Analogamente a quanto succede per l'ordinaria circuitazione, si ha che, se esiste potenziale di moto, la circuitazione superficiale è indipendente dalla superficie chiusa lungo la quale è calcolata.

Se infatti le velocità dipendono da un potenziale, $\varphi = \varphi(x, y, z)$, avendosi

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

per una espressione trovata nella Nota I, si ha

$$(2) \quad C^{xy} = \iint \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x} q - \frac{\partial \varphi}{\partial y} p \right\} dx dy$$

avendo posto l'equazione della superficie σ sotto la forma $z = z(xy)$.

L'integrale (2) dovrà essere indipendente dalle variazioni di z . Ed invero, chiamando con F la quantità sotto il segno, dal calcolo delle variazioni sappiamo che deve essere soddisfatta la condizione

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial p} - \frac{d}{dy} \frac{\partial F}{\partial q} = 0;$$

si ha infatti identicamente

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} q - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} p + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} p - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} q = 0.$$

Il ragionamento fatto può evidentemente ripetersi per ciascuna delle altre componenti del vettore della circuitazione superficiale.

3. Con uguale facilità si dimostra la proprietà reciproca, e cioè: se la circuitazione superficiale è nulla, il moto del fluido è irrotazionale.

Dalla (1), per una formola nota ⁽¹⁾, si ha

$$(3) \quad \mathbf{C} = \int_{\sigma} \mathbf{V} \wedge \mathbf{n} \, d\sigma = \int_{\tau} \text{rot } \mathbf{V} \, d\tau$$

avendo indicato con τ il volume di fluido racchiuso dalla superficie σ .

⁽¹⁾ C. Burali Forti e R. Marcolongo, *Elementi di calcolo vettoriale*. Bologna, Zanichelli, 1909.

Se si suppone nulla la circuitazione, sarà

$$\text{rot } \mathbf{V} = 0,$$

e quindi, per un noto teorema ⁽¹⁾, e supponendo (ciò che si può fare senza togliere di generalità) il campo τ semplicemente connesso, il vettore \mathbf{V} è il gradiente di una funzione uniforme, cioè è

$$\mathbf{V} = \text{grad } \Phi$$

in cui Φ è il potenziale di velocità.

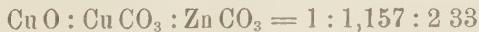
La formula (3) ci dà il modo, infine, di enunciare, nei riguardi della circuitazione superficiale, un teorema che è l'analogo di quello di Stokes per l'ordinaria circuitazione.

Ricordando infatti che $\frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{V}$ è il vettore della velocità istantanea di rotazione delle particelle di fluido in moto, si può dire che *la circuitazione superficiale è uguale al doppio della somma delle velocità istantanee di rotazione, moltiplicate per l'elemento del volume racchiuso dalla superficie lungo la quale la circuitazione è calcolata.*

Mineralogia. — *Sulla vera natura della Rosasite.* Nota I del dott. C. PERRIER ⁽²⁾, presentata dal Socio E. ARTINI ⁽³⁾.

Il prof. Lovisato descrisse, parecchi anni or sono ⁽⁴⁾, un nuovo minerale nettamente cristallizzato di rame e zinco, di color verde-chiaro tendente all'azzurrognolo, con lucentezza sericea nella frattura fresca, lievemente mammellonare, proveniente dalle miniere di Rosas nel Sulcis (Sardegna), al quale minerale egli, per la sua provenienza, diede il nome di Rosasite.

La composizione chimica, determinata in base all'analisi eseguita dal dott. Rimatori, che aveva ottenuto i seguenti risultati: $\text{H}_2\text{O} = 0,21$; $\text{PbO} = \text{tracce}$; $\text{ZnO} = 33,57$; $\text{CuO} = 36,34$; $\text{CO}_2 = 30,44$; somma = 100,56, sarebbe stata secondo Lovisato, la seguente:



corrispondente, quindi, approssimativamente ad un composto di questo tipo:



⁽¹⁾ C. Burali Forti e R. Marcolongo, loc. cit.

⁽²⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Torino diretto dal prof. Zambonini.

⁽³⁾ Presentata nella seduta del 16 gennaio 1921.

⁽⁴⁾ D. Lovisato, *Nuovo minerale della miniera di Rosas (Sulcis; Sardegna).* Questi Rend. XVII, 2 (1908), pag. 723.

Il minerale era, dunque, da considerarsi come una specie nuova, non potendo per la sua omogeneità, come osservava Lovisato, essere considerato come una miscela di malachite e di Smithsonite, nè essere ricondotto alla malachite, differenziandosi da questa sia per il peso specifico, che in due determinazioni diverse era stato ottenuto eguale a 4,07, sia, e specialmente, per i risultati analitici.

Sulla vera natura della Rosasite rimasero, però, dei dubbi, sia per il tipo di composizione davvero poco comune, sia soprattutto, perchè, dato il colore del minerale, appariva verosimile che esso non fosse anidro. Delle nuove ricerche chimiche apparivano molto desiderate, onde sono veramente assai grato al prof. Zambonini, che, avendo avuto dall'ing. prof. G. Lineio (¹) una piccola porzione del campione originale sul quale fu fondata la specie, campione riunenuto nella raccolta del compianto prof Lovisato, volle affidarmi l'incarico di controllare la natura di questo minerale.

La Rosasite si presentava, come era stata descritta, o sotto forma di una sottile venuzza lievemente mammillonare, ovvero di piccoli bitorzoletti, sopra una roccia ricoperta di limonite e formata da una massa argillosa, e possedeva struttura fibroso-raggiata, con splendore sericeo e colore verde-chiaro nella frattura fresca, ed un colore lievemente più cupo alla superficie.

Circa un grammo di sostanza, sotto forma di piccoli frammentini, potei isolare dalla roccia, e con essi, dopo essermi scrupolosamente assicurato della loro purezza, osservandoli al microscopio, determinai dapprima, col metodo della boccetta, il peso specifico, che trovai eguale a 4,09, valore questo, sostanzialmente uguale a quello ottenuto precedentemente (4,07) e che quindi mi assicurava dell'identità del minerale.

La sostanza che, ridotta in polvere, aveva un colore verde-azzurrino, venne quindi, posta entro una navicella in un fornelletto elettrico, e calcinata in corrente di aria secca e priva di CO_2 , onde potere direttamente, per pesata, determinare l'eventuale acqua e l'anidride carbonica. Il residuo, della calcinazione venne sciolto in acido nitrico e portato a secco per insolubilizzare l'eventuale silice, e filtrato onde eliminare tutti i residui insolubili, nel filtrato vennero, per via elettrolitica, determinati il rame ed il piombo, il primo come Cu ed il secondo come PbO_2 . Nel liquido restante venne, dopo opportuna concentrazione, separato il ferro dallo zinco mediante duplice precipitazione con idrato ammonico e poi, essendosi ottenuto un lieve precipitato rosso-cristallino col reattivo di Čugaev, venne determinato il nichelio, pesandolo come sale di nichel della dimetilgigionima.

(¹) Compio volentieri il gradito dovere di ringraziare pubblicamente il prof. ingegnere Lineio per la cortesia con la quale ha soddisfatto il mio desiderio di far studiare nuovamente la Rosasite, ponendo a mia disposizione un materiale raro e prezioso.

La separazione del magnesio dallo zinco venne eseguito, secondo quanto consiglia Vogt⁽¹⁾, precipitando il primo come fosfato ammonico magnesiaco in soluzione fortemente ammoniacale, ed il secondo come fosfato zinco-ammonico, semplicemente scacciando l'NH₃ per concentrazione delle acque madri, e pesandolo, poi, come pirofosfato. Nè nichelio, nè magnesio erano stati osservati dal Rimatori.

I risultati analitici ottenuti furono i seguenti:

H ₂ O	8,58	1,038	1,038	1,04
CO ₂	20,18	1,000	1,000	1,00
Cu O	41,58	1,189	1,189	
Zn O	28,96	0,776		
Pb O	0,23	0,002		
Ni O	0,04	0,001	0,790	
Mg O	0,21	0,011		
Fe ₂ O ₃	0,31			
residuo	0,18			
		100,27		

Da questi dati, e riunendo insieme i valori molecolari degli ossidi, si deducono i seguenti rapporti:

$$\text{H}_2\text{O} : \text{CO}_2 : \text{R}^{\text{n}}\text{O} = 1.04 : 1 : 1,93$$

corrispondenti esattamente ad un composto del tipo:



quale noi abbiamo nella malachite.

Si noti, poi, che per il ferro si ammise, non essendosi potuto determinare se questo esisteva totalmente o parzialmente allo stato ferrico, che esso esistesse allo stato trivalente, e provenisse, come impurezza, dalla limonite che accompagna il minerale, mentre, se esso fosse allo stato bivalente, il rapporto per quanto si riferisce agli ossidi verrebbe ancora, se anche di poco, a migliorare.

Se, ora, osserviamo i risultati dell'analisi, noi troviamo che i dubbi che venivano avanzati sulla composizione chimica della Rosasite, erano perfettamente giustificati, in quanto che la quantità di acqua in essa contenuta è assai maggiore di quella rinvenuta da Rimatori (appena il 0,21 %), salendo alla cospicua cifra di 8,58 %, il che cambia completamente la natura del minerale. E si può anche aggiungere che sia per ZnO, che per CuO fra i valori miei e quelli di Rimatori si ha una differenza di oltre il 5 %.

(1) Treadwell, *Trattato di chimica-analitica*, vol. II, pag. 123. Traduz. di A. Miolati.

Zoologia. — Contributi alla Storia naturale degli Anofeli e alla lotta biologica contro di essi (Campagna antimalarica di Fiumicino [Roma] diretta dal prof. B. Grassi - Annata III). Nota di E. BORA, presentata dal Socio B. GRASSI ⁽¹⁾.

1° - SPOSTAMENTI DEGLI *A. CLAVIGER* NELLE VARIE ORE DEL GIORNO.

A - Osservazioni.

Stalla dello Stabilimento idrovoro di Maccarese (agosto 1920).

				A N O F E L I			CONDIZIONI
	giorno	ora		Num.	♂	♀	
I	2	9	cattura	15	4	11	
		18,45	chiusura e cattura				
II	3	9	riapertura	143	♂ e ♀	id.	
		20,40	cattura				
III	4	9	cattura	35	id.		
		18,15	chiusura e cattura				
IV	4,15	9	riapertura	138	31	107	3 con molto sangue e uova piccole, 1 con uova grosse, 103 vuote.
		8,45	cattura				
V	5	9	chiusura e cattura	4	3	1	
		18,15	riapertura				
VI	5	9	chiusura e cattura	6	6		tutte con molto sangue e uova piccole.
		20,40	riapertura				
VII	6	9	chiusura e cattura	4	1	3	2 con molto sangue e uova piccole, 1 vuota.
		18,15	riapertura				
VIII	6	9	cattura	0			
		21,40	chiusura e cattura				
IX	6	9	riapertura	15	15		tutte con molto sangue e uova piccole.
		18,15	chiusura e cattura				
X	7	9	riapertura	8	8		6 con molto sangue e uova piccole, 1 con sangue e uova medie, 1 vuota.
		20,45	cattura				

Nelle prime ore del giorno 5, si leva con abbassamento di temperatura, vento di libeccio che crescendo di forza, obbliga il giorno successivo ad interrompere le osservazioni, che vengon riprese il giorno:

XI	20	9	cattura	23	10	13	6 con molto sangue e uova piccole, 2 con sangue mezzo digerito e uova medie, 5 vuote.
XII	21	9	id.	56	♂ e ♀		in differenti condizioni, anche con uova grosse.
XIII	21	3	id.	35		35	33 con molto sangue e uova piccole, 2 con sangue mezzo digerito e uova medie.
XIV	22	8	id.	86	♂ e ♀		tutti con molto sangue e uova piccole.

(1) Presentata nella seduta del 7 novembre 1920.

B - Considerazioni.

1°) Gli anofeli entrarono dunque nella stalla in grande quantità al tramonto (XII) e più specialmente di buon mattino (XIV, IV e anche II, VII, X).

2°) Cessato l'arrivo in massa al crepuscolo, una certa quantità continua ad entrare durante la notte (VI, IX, XIII e anche II).

3°) Mentre in questa stalla, in immediata vicinanza di acque ricche di larve, si raccolse durante le ore del giorno, un certo numero (con forte percentuale di maschi) di anofeli (I, III, V, XI), minore fu quello osservato in esperienze analoghe nello stesso mese, in stalle di Porto Nuovo, a maggior distanza da acque anofeliche, e nullo addirittura (agosto 1919) in porcili di Fiumicino ancora più lontani da focolai idrici. (Relazione Grassi e Sella sulla Campagna antimalarica di Fiumicino, 1919, pag. 213).

4°) Nelle ore della notte non sono entrati maschi, ma i nostri dati non sono sufficienti. Se il fatto si verificasse costantemente potrebbe forse mettersi in rapporto col tempo dell'accoppiamento.

5°) È notevole il fatto (IV) che di 107 ♀ entrate all'alba, 103 erano vuote. 3 con molto sangue e uova piccole. 1 senza sangue e con uova grosse, mentre quelle entrate di notte (VI - IX - XIII) erano tutte piene di sangue, tranne 2 sole con sangue mezzo digerito.

Conviene qui richiamare le osservazioni fatte allo stesso Stabilimento nelle ore del tramonto.

Il 12-V al tramonto stando 3 persone fuori di una casetta con protezione meccanica, furono assalite da 34 anofeli dallo ore 20.30 alle ore 21, in cui cessò l'arrivo. Guardando col lume sulla parete bianca della casa, se ne trovò circa una ventina che si erano posati senza aver punto. Si stava dentro una stanza protetta da retina alla finestra. ma con la porta aperta. Presso a poco la stessa cosa si verificò il giorno dopo allo stagno (Casa Giocondo). Si era in 4 (tra essi il prof. Grassi). Si concluse che di molti che vengono a pungere in un ambiente dove ci sono persone, solo una parte minore punge immediatamente, gli altri quasi aspettando miglior tempo per pungere. Sembra che quelle vuote che si spostano non siano tutte egualmente affamate, o evitino di pungere gente che non sia immobile.

Il 6-VI si ripeterono queste osservazioni a nord di M. Arena, presso l'estremità del fosso Coccia di Morto, in un porcile di cannucce con 30 maiali, aperto da un lato e nel resto chiuso male, dove il mattino precedente fra le cannucce si era veduta una grandissima quantità di anofeli, così tanti che facendoli muovere si udiva un forte ronzio. Alla sera stando in tre individui (tra essi il prof. Grassi) nel porcile seduti a terra, si osserva che ne entrano e ne escono molti. Pochi vengono a pungere; non pochi entrano dall'alto e vanno direttamente a posarsi sulle cannucce; anche di quelli che

entrano dal basso, alcuni vanno a posarsi senza pungere. Di 15 per es. che si poterono contare, 3 soli vengono a pungere.

Conseguentemente degli anofeli vuoti e con uova pochissimo sviluppate, che entrano, solo una piccola parte punge immediatamente: tutti o quasi tutti gli altri pungono dopo qualche ora che sono entrati. Si accordano così tutte le osservazioni riferite in proposito.

2° — I PESCI E LE ANITRE NELLA DISTRUZIONE DELLE LARVE.

Pesci. Nel luglio c. a. nel canale Coccia di Morto all'altezza dei tubi di comunicazione col lago omonimo, per un tratto di savanella di circa metri cento, si trovarono per tutta la durata del mese sino ai primi di agosto, numerose ed in alcuni punti numerosissime larve di *A. Claviger* di ogni grandezza. In questo periodo di tempo e nello stesso tratto di savanella, si pescavano pure numerosissimi « nonni » (*Ciprinodon calaritanus*), anche in misura di 6, 7 per pescata con una piccola bacinella.

In progresso di tempo, nella prima quindicina di agosto, mutarono le condizioni dell'ambiente, scomparvero i pesci e si fecero scarse le larve.

Anitre. — Per la durata di circa un mese (6-IX-9-X) vennero tenute per nove ore al giorno, diciotto anitre, in un tratto di 250 metri del canale Coccia di Morto, largo metri 5, in condizioni normali, cioè da molto tempo non diserbato, nè altrimenti alterato. Un tratto vicino dello stesso canale di ugual lunghezza ed in analoghe condizioni, anche per quantità di larve, servì di controllo.

Osservazioni accurate ogni 5 o 6 giorni, non fecero mai rilevare qualsiasi differenza nel numero delle larve di *A. claviger* (sempre numerosissime e d'ogni misura), tra l'uno e l'altro tratto, nè diversa proporzione tra piccole e grandi, neppure nei punti, dove moltissime penne sparse, facevan presumere le anitre maggiormente si fossero trattenute a diguazzare.

Una volta sola, dopo circa venti giorni, parve di notare nel tratto delle anitre, una differenza in meno nel numero delle larve grandi. Ma da più accurati esami, fatti qualche giorno appresso ed alla fine dell'esperimento, tale presunta differenza, dovuta probabilmente ad insufficienza di pescate, risultò inesistente.

Il 12-X poi, in un mastello pieno d'acqua del diametro d'un metro approfondato a livello del terreno e circondato di rete metallica, si innisero con un po' di *Myriophyllum*, più di 350 larve di *A. claviger*, di ogni grandezza e numerose ninfe, e constatato che quello stava alla superficie e queste erano in buone condizioni, vi si tennero, per più di un'ora, due anitre, tenute a digiuno dalla sera innanzi.

Durante questo tempo, passato dalle anitre per lo più sull'acqua per la ristrettezza che appositamente s'era data al margine di terreno tra i bordi del mastello e la rete di chiusura, si osservò che beccavano alla superficie dell'acqua, parve anzi una volta che beccassero precisamente le larve.

Ammazzatele quindi subito e apertele, non si trovarono tracce di larve, né nella bocca, né nell'esofago, né nell'ingluvie, né nello stomaco.

Nell'ingluvie vi era, specialmente in una, un po' di granoturco in parte spezzettato, frammenti di *Myriophy lum* e qualche lumaca; nell'altra anche una spoglia di un dittero e un emittero, nessuna traccia di larve. Nel ventriglio un po' di granoturco e nessun altro nutrimento.

Nel mastello l'erba tutta spezzettata era in gran parte andata a fondo e più non sussisteva che uno scarso numero di larve piccole. Evidentemente col diguazzare delle anitre per oltre un'ora, in una superficie relativamente così ristretta, le larve grosse e le ninfe erano morte, senza che fossero inghiottite.

Pur troppo i fatti qui riferiti non depongono in favore dell'efficacia di quella lotta biologica contro gli anofeli, sia a mezzo dei pesci, sia a mezzo delle anitre, della quale si è tanto parlato negli ultimi anni.

Fisica. — *L'audizione biauricolare dei suoni puri.* Nota del prof. A. LO SURDO, presentata dal Socio sen. VOLTERRA⁽¹⁾.

Una prova sperimentale che la percezione della direzione di provenienza dei suoni di frequenza bassa e dei rumori è dovuta alla differenza di tempo colla quale i movimenti vibratori arrivano agli orecchi⁽²⁾, si può dare facilmente mediante l'apparecchio per l'interferenza dei suoni.

La sorgente sonora si colloca davanti l'imboccatura del tubo A (fig. 1) dal quale partono le due vie S e D; a queste si attaccano i due tubi di gomma F e G che portano separatamente il suono ai due orecchi. In questo apparecchio generalmente uno dei due tubi, S, è di lunghezza invariabile, mentre l'altro, D, si può allungare. Per la nostra esperienza occorre però poter fare più lungo ora l'uno ora l'altro dei due cammini, e perciò è bene che il tubo F sia alquanto più lungo dell'altro tubo G, cosicchè l'eguaglianza dei cammini si ha quando il tubo D è opportunamente allungato.

Colleghiamo la via S coll'orecchio sinistro e la D col destro⁽³⁾. Quando i due cammini che il suono deve percorrere per giungere ai due orecchi sono eguali noi abbiamo la sensazione che la sorgente si trovi perfettamente di fronte o alle spalle. In queste condizioni noi non abbiamo alcun elemento per decidere delle due posizioni.

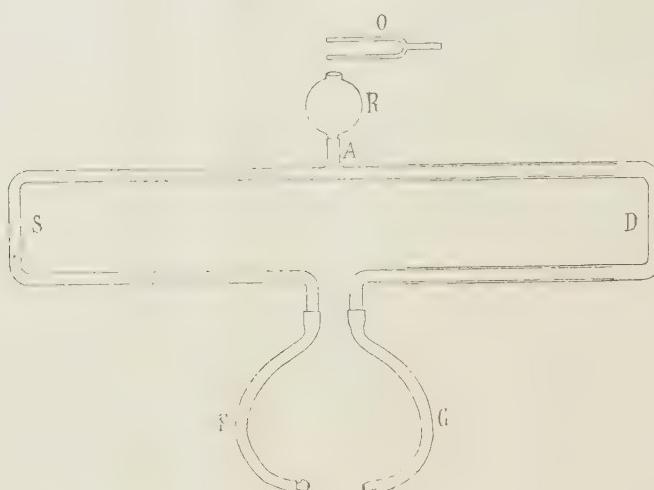
(1) Presentata nella seduta del 5 dicembre 1920.

(2) Lord Rayleigh, *On our Perception of Sound Direction.* Phil. Mag., vol. VIII, 1907, pag. 214.

(3) È necessario che gli estremi dei tubi F e G siano infilati a tenuta negli orecchi: perciò è bene far terminare i due tubi, come si vede nella figura, cogli speciali canelli di ebanite che si usano in alcuni apparecchi di ascoltazione per uso medico.

Se la via D è più lunga, si sente che la sorgente sta a sinistra, mentre se è più corta, si sente la sorgente alla destra. Anche in questo caso si possono sentire due posizioni della sorgente simmetriche rispetto alla retta che passa per i due orecchi, poichè per entrambe gli orecchi, nelle condizioni naturali di ascoltazione, ricevono il suono collo stesso ritardo.

A dire il vero, nella determinazione della posizione della sorgente noi ci aiutiamo istintivamente cogli altri sensi e anche colla memoria; perciò,



quando eseguiamo l'esperienza tenendo davanti l'apparecchio e il diapason, delle due posizioni corrispondenti a ciascuna differenza di cammino percepiamo quasi sempre quella anteriore.

Quando si ascolta ad orecchi liberi, cioè nelle condizioni naturali, si elimina istintivamente questa incertezza ruotando la testa: allora si sente spostarsi la sorgente verso l'orecchio per il quale il cammino va diventando minore e si percepisce la sua vera posizione.

Per la esperienza si può adoperare una sorgente qualunque, purchè non dia suoni acuti puri di frequenza superiore al limite oltre il quale cessa la percezione per differenza di fase⁽¹⁾, che è di poco superiore a 512 secondo Lord Rayleigh⁽²⁾ e circa 600 secondo Stewart⁽³⁾.

Ciò posto, modifichiamo l'esperienza nel seguente modo: come sorgente adoperiamo un diapason O che vibra davanti alla bocca di un risonatore R il cui tubo posteriore è infilato nell'estremo di A: così entra nell'apparec-

⁽¹⁾ Quando i suoni sono più acuti, la percezione della posizione della sorgente è dovuta alla differenza fra le intensità ai due orecchi.

⁽²⁾ Lord Rayleigh, loc. cit.; Scient. Pap., vol. V, pag. 352.

⁽³⁾ Stewart, Phys. Rev., IX, 1917, pag. 502,

chio un suono puro. E stabiliamo inizialmente la differenza di cammino di una intera lunghezza d'onda λ , per esempio allungando opportunamente la via D (¹). In queste condizioni abbiamo la netta percezione che la sorgente stia di fronte, come quando i due cammini sono eguali. E difatti noi non abbiamo la possibilità di riconoscere, se il suono non è molto smorzato, una vibrazione dalla successiva, ed è quindi come se i due cammini fossero uguali.

Questa seconda esperienza elimina la obiezione che può essere fatta alla prima, e cioè che non si possa escludere l'effetto della intensità poichè allungando il cammino, oltre a produrre un ritardo, si produce insieme un indebolimento del suono.

Partiamo ora dalla differenza di cammino di una intera lunghezza d'onda λ , ottenuta per esempio con una maggiore lunghezza del tubo di destra D. Se allunghiamo ulteriormente il tubo D, allora sentiamo che la sorgente dalla posizione frontale si sposta verso l'orecchio sinistro e, se accorciamo, sentiamo invece che la sorgente si sposta verso l'orecchio destro, nonostante che in queste condizioni il cammino di destra sia notevolmente più lungo di quello di sinistra, e quindi l'intensità minore.

Il risultato è a tutta prima sorprendente; poichè se il suono è puro, ai due orecchi arrivano due treni d'onda dello stesso periodo e della stessa ampiezza, nei quali nulla ci permette di distinguere una vibrazione dalle successive: quindi non dovremmo essere in grado di giudicare, quando i suoni, come ora, non arrivano più in fase, se la differenza è dovuta ad un minor cammino l da una parte o ad un maggior cammino $\lambda - l$ dalla stessa parte.

La percezione della direzione di provenienza dei suoni è l'effetto di una educazione che noi acquistiamo istintivamente da bambini mettendo in relazione la posizione della sorgente sonora quale la vediamo, o la riconosciamo altrimenti, con la corrispondente sensazione biauricolare. Ebbene, noi manchiamo assolutamente di questa educazione per differenze di tempo superiori a quella massima che si può produrre nelle condizioni naturali, cioè quella che si ha quando la sorgente sta di fronte ad un orecchio.

Ciò posto, noi possiamo spiegarci il risultato dell'ultima esperienza. Le due differenze di cammino l e $\lambda - l$ non possono essere entrambe inferiori alla distanza acustica fra i due orecchi, poichè la percezione biauricolare si ha per lunghezze d'onda maggiori del doppio di quella distanza: quindi noi giudichiamo istintivamente e senza esitazione in relazione alla differenza di tempo alla quale nell'aria libera corrisponderebbe una reale posizione della sorgente, cioè quella dovuta alla minore delle due differenze di cammino,

(¹) Se l'apparecchio non consente un allungamento λ , questa differenza di cammino si può ottenere sostituendo il tubo G con un altro opportunamente più lungo del tubo F.

che è l . E se noi aumentiamo l in modo da superare la distanza biauricola che è minore di $\frac{\lambda}{2}$, ci confondiamo facilmente.

La stessa origine ha probabilmente il fatto che per i suoni molto acuti la percezione della provenienza del suono non è più dovuta alla differenza di fase. Difatti, per frequenze alquanto superiori al limite di quelle colle quali si ha la percezione per differenza di fase, la differenza di cammino tra i due orecchi nell'aria supera la mezza lunghezza d'onda e quindi ad ogni differenza di fase non corrisponde più una sola posizione della sorgente. E per questi suoni evidentemente noi non possiamo formarci l'educazione accennata.

È prevedibile che il limite superiore delle frequenze che danno l'effetto di fase non sia lo stesso per tutti gli individui, e sarebbe interessante vedere sè negli animali, per i quali è lecito supporre un effetto di fase, questo limite sia più alto quando la distanza auricolare è minore di quella dell'uomo.

CONCORSI A PREMI

Elenco dei lavori presentati ai concorsi ai premi
del Ministero della Pubblica Istruzione per le *Scienze fisiche e chimiche*.

(Scadenza 31 dicembre 1920. — Due premi di L. 2000 ciascuno).

1. BERNINI ARCIERO. 1) « Nozioni sui sistemi ottici dei congegni di puntamento » (st.). — 2) « Istruzione per goniometristi » (st.). — 3) « Sui telemetri a larga base » (st.). — 4) « Istruzione sul servizio d'ascoltazione per la difesa aerea ». I, II, III parte (st.). — 5) « Norme per la postazione di batterie contro aerei e dei mezzi ausiliari per la difesa aerea » (st.). — 6) « Su di un dispositivo acustico per riconoscimento di velivoli e per telegrafia acustica fra aerei e la terra » (ms.). — 7) « Su di un nuovo metodo di impiego telemetro monostatico per l'inseguimento e la misura della distanza degli aerei in volo » (ms.) — 8) « Sulla parallasse del suono nel puntamento acustico di un aereo in volo » (ms.).

2. CALCAGNI LUIGI GENNARO. 1) « L'industria del vetro e le sue condizioni in Italia » (st.). — 2) « Azione del calore sull'acido ossalico e gli ossalati » (st.). — 3) « I combustibili » (st.). — 3) « Solubilità del solfo negli alcali caustici a freddo » (bozze di stampa). — 5) « Lezioni di chimica-fisica applicata » (ms.). — 6) « Trattato di chimica generale e inorganica » (st.).

3. COPPADORO ANGELO. 1) Sulla determinazione dell'acido tartarico per via polarimetrica » (st.) — 2) « Gli scisti bituminosi della Valle di Non nel Trentino » (ms.). — 3) « L'industria chimica italiana alla prima Fiera di campioni » (st.). — 4) « Conferenza dell'Unione Internazionale di Chimica pura ed applicata » (st.).

4. CRESTANI GIUSEPPE. 1) « Meteorologia aeronautica » (st.). — 2) « Questione di altimetria barometrica » (st.). — 3) « Le cappe » (st.). — 4) « Dell'osservazione delle nubi » (st.). — 5) « Le nubi temporalesche » (st.). — 6) « Della definizione e segnalazione di 'temporale' » (st.). — 7) « Il vento su terreni montuosi » (st.). — 8) « Per la

previsione del vento » (st.). — 9) « Le variazioni del vento » (st.). — 10) « Dell'interpolazione e dell'estrapolazione nell'elaborazione statistica della velocità del vento alle varie quote » (st.). — 11) « Dell'estrapolazione lungo la verticale delle frequenze del vento » (st.). — 12) « Sui limiti dell'altezza dell'esplorazione dell'atmosfera col palloncino pilota » (st.). — 13) « Le condizioni atmosferiche predominanti nelle regioni attraversate col raid Roma-Tokio » (st.). — 14) « Temporali e groppi in Italia » (st.). — 15) « Della nomenclatura e classificazione delle nubi » (ms.). — 16) Sulla fronte del groppo » (ms.).

5. DRAGO ERNESTO. 1) « Nuove ricerche sulla depolarizzazione della luce (st.). — 2) « In memoria di Giovan Pietro Grimaldi » (st.). — 3) « Osservazioni sulla depolarizzazione della luce » (st.). — 4) « Sull'attrito interno del cobalto in campo magnetico variabile » (st.). — 5) « Sull'attrito interno del ferro-nichel nel campo magnetico » (st.). — 6) « Influenza del campo magnetico sull'attrito interno del cobalto nel periodo d'accomodazione » (st.). — 7) « Un'esperienza da lezione sulla tensione eletrostatica » (st.). — 8) « Azione delle onde elettriche sull'isteresi dielettrica (ms.).

6. PERRUCCA ELIGIO. 1) « Nuove osservazioni e misure in cristalli otticamente attivi (Na Cl O_2) » (st.). — 2) « Sul modo di ottenere un 'quarto d'onda' acromatico. Due sferometri sensibilissimi » (st.). — 3) « Sur les ondes latéralement indéfinies, à vibrations pendulaires, que les réflexions associent à un ou deux systèmes analogues donnés d'ondes incidentes » (st.). — 4) « Sulla elettrizzazione del mercurio detta per strofinio. I » (st.). — 5) « Id. Id. II-III » (ms.). — 6) « Sulle differenze di potenziale al contatto » (ms.).

7. SALVADORI ROBERTO. 1) « La lignite di S. Gemignano e la sua utilizzazione in Cok e Gas combustibili » (st.). — 2) « Il 'fattore a' come termine di classificazione delle ligniti » (st.). — 3) « L'ittiolo Petri di Sassoferato » (st.). — 4) « Atomi e nuclei atomici » (ms.).

8. STEFANINI ANNIBALE. 1) « Sui mezzi atti a svelare le simulazioni di sordità » (st.). — 2) « Sui movimenti degli occhi per stimoli acustici » (st.). — 3) « Sul potere risolutivo dell'orecchio » (st.). — 4) « Sul modo di eseguire la prova di Rinne » (bozze di st.). — 5) « Modo di usare un solo diapason per la ricerca della simulazione di sordità unilaterale » (bozze di st.). — 6) « Sulla percezione dei rumori » (bozze di st.). — 7) « Sulla percezione della direzione del suono » (ms.). — 8) « Dinamo a nucleo fisso o rotante per disposizioni didattiche » (ms.). — 9) « Rotazione di un polo magnetico attraverso un circuito chiuso » (ms.). — 10) « Sulla induzione unipolare » (ms.).

9. TALAMO FRANCESCO LUIGI. 1) « Un semplice apparecchio da lezione per la caduta dei gravi » (st.). — 2) « Per l'insegnamento della Cosmografia » (st.). — 3) « Le deformazioni scolastiche d'una scienza » (st.).

10. TENANI MARIO. 1) « Una questione fondamentale di navigazione aerea: relazione tra l'angolo di deriva e l'angolo di pilotaggio ». (st.). — 2) « Meteorology in relation to aeronautics ». (st.). — 3) « Calcolo della densità dell'aria alle varie altezze fino a 10.000 metri, in base alle osservazioni italiane » (st.). — 4) « Sul collaudo e sul confronto degli apparecchi aerei: riduzione delle prove alle condizioni atmosferiche normali ». (st.). — 5) « Studio sull'indicatore di velocità ». (st.). — 6) « Correzioni ai tiri delle artiglierie relative alla densità dell'aria e al vento » (st.). — 7) « Lezioni elementari di aerologia ». (ms.). — 8) « Sulla preparazione dei grandi voli. (Abaco pei calcoli) ». (st.). — 9) « Sulla determinazione delle proprietà di un apparecchio aereo durante il volo, in funzione della densità attuale dell'aria ». (st.). — 10) « Intorno all'opportunità di convenzioni internazionali per la definizione delle quote ». (st.). — 11) « Nuove tabelle per la determinazione delle altezze per mezzo del barometro ». (Litografate). — 12) « Ricerche sulla oscillazione diurna della velocità del vento a diverse altezze sul suolo ». (st.). — 13) « Traduzione

italiana delle: Note elementari sui minimi quadrati, sulle teorie della statistica e della correlazione per la meteorologia e per l'agricoltura ». (st.). — 14) « Abaco per la riduzione delle misure inglesi in misure metriche e viceversa ». (st.). — 15) « Sull'utilizzazione del vento come forza motrice ». [In corso di stampa] (ms.).

Elenco dei concorrenti alla fondazione « Carpi » per il 1919-1920.

(Premio L. 900).

CARANO ENRICO. « Nuove ricerche sulla embriologia delle *Asteraceae* » (ms.).

G. C.